

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Дополнительные главы топологической комбинаторики
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: М.В. Блудов, ассистент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 03.02.2025

Аннотация

Этот курс продолжает курс “Топологическая комбинаторика”, однако может изучаться независимо. Курс посвящен предмету, который стал активной и инновационной областью исследований в математике за последние сорок лет с растущим числом приложений в математике, информатике и других прикладных областях. Топологическая комбинаторика занимается решением комбинаторных задач с применением топологических инструментов. В большинстве случаев эти решения очень элегантны, и связь между комбинаторикой и топологией часто оказывается совершенно неожиданной. Курс планируется в двух частях. Вторая часть курса начнется с обсуждения классических теорем дискретной геометрии, таких как теоремы Радона и Тверберга, цветных теорем Хелли и Каратеодори. Затем будут рассмотрены топологические версии теоремы Радона и Тверберга вместе с теоремой Ван Кампена-Фолреса. Эти теоремы можно понимать как утверждения о невложимости гиперграфов в пространства определенной размерности, и для их доказательства потребуется развить некоторый топологический аппарат. Также будут рассмотрены теорема Шнирельмана о нахождении квадрата на гладкой кривой, теоремы о трансверсали, и, если успеем, рассмотрим свойства графов, их сложность и их связь с топологией, и если совсем успеем, рассмотрим дискретную теорию Морса. Курс рассчитан на студентов 3–6 курсов. Предполагается, что слушатели имеют базовые знания из курса топологии.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

— дать обучающимся в руки новый для них инструмент решения комбинаторных задач. В результате обучающиеся смогут как решать задачи непосредственно с использованием топологических методов, так и в целом получать/улучшать навыки топологического анализа данных, которые могут быть полезными при разработке алгоритмов. Студенты также попрактикуются в командной работе над проектом, предполагающим реализацию полного цикла решения неформально поставленной задачи.

Задачи дисциплины

- задачи дисциплины включают ознакомление обучающихся с терминологией, методами и основными результатами топологической комбинаторики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
	УК-3.2 Учитывает в своей социальной и профессиональной деятельности интересы, особенности поведения и мнения (включая критические) людей, с которыми работает/взаимодействует, в том числе посредством корректировки своих действий
	УК-3.3 Способен предвидеть результаты (последствия) как личных, так и коллективных действий
	УК-3.4 Способен планировать командную работу, распределять поручения членам команды, организовать обсуждение разных идей и мнений
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии математических исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области

методы решения прикладных задач	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-5 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-5.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-5.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-5.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-6 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области информатики и вычислительной техники, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-6.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-6.2 Способен разрабатывать и модернизировать программное и аппаратное обеспечение информационных и автоматизированных систем
	ОПК-6.3 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-6.4 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-6.5 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий; владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Имеет практический опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками
	ПК-2.3 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия дополнительной главы топологической комбинаторики и основные теоремы;
- контекст их использования;
- релевантный математический аппарат, основную учебную литературу по данной дисциплине.

уметь:

- доказывать основные теоремы дополнительной главы топологической комбинаторики,
- применять результаты топологической комбинаторики для учебных (упрощённых) и реальных задач дискретной математики и дискретной оптимизации.

владеть:

- терминологией топологической комбинаторики и алгоритмами справедливого дележа.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Классические теоремы Радона, Тверберга, Хелли.	6	6		6
2	Симплициальные комплексы, операции над ними и их свойства	6	6		6
3	Топологическая теорема Тверберга, цветное обобщение	6	6		6
4	Теорема Шнирельмана	6	6		6
5	Коллапсируемые комплексы	6	6		6
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Классические теоремы Радона, Тверберга, Хелли.

Цветные версии теоремы Каратеодори и Хелли.

2. Симплициальные комплексы, операции над ними и их свойства

Топологическая теорема Радона, сферы Бира, теорема Ван-Кампена Флореса.

3. Топологическая теорема Тверберга, цветное обобщение

Векторные расслоения, Эйлеров класс векторного расслоения.

4. Теорема Шнирельмана

Первая теорема о трансверсали и вторая теорема о трансверсали.

5. Коллапсируемые комплексы

Гипотеза Карпа в случае степеней простых и Дискретная теория Морса.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Компьютерный класс, техническое обеспечение: Microsoft Office, 3DExperience/Catia.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— Долгопрудный : Интеллект, 2013 .— 104 с.

Дополнительная литература

1. Введение в теоретическое программирование. Беседы о методе [Текст] / А. П. Ершов : доп. М-вом высш. и сред. спец. обр. СССР - М.Наука,1977

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не требуется.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

Для успешного изучения дисциплины студент должен знать фундаментальные понятия, законы, теории.

Неотъемлемой частью курса являются лабораторные занятия, на которых закрепляются теоретические знания и вырабатываются практические навыки.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: М.В. Блудов, ассистент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
	УК-3.2 Учитывает в своей социальной и профессиональной деятельности интересы, особенности поведения и мнения (включая критические) людей, с которыми работает/взаимодействует, в том числе посредством корректировки своих действий
	УК-3.3 Способен предвидеть результаты (последствия) как личных, так и коллективных действий
	УК-3.4 Способен планировать командную работу, распределять поручения членам команды, организовать обсуждение разных идей и мнений
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии математических исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-5 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-5.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-5.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-5.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-6 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области информатики и вычислительной техники, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-6.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-6.2 Способен разрабатывать и модернизировать программное и аппаратное обеспечение информационных и автоматизированных систем
	ОПК-6.3 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-6.4 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-6.5 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте

ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Имеет практически опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками
	ПК-2.3 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дополнительные главы топологической комбинаторики» обучающийся должен:

знать:

- основные понятия дополнительной главы топологической комбинаторики и основные теоремы;
- контекст их использования;
- релевантный математический аппарат, основную учебную литературу по данной дисциплине.

уметь:

- доказывать основные теоремы дополнительной главы топологической комбинаторики,
- применять результаты топологической комбинаторики для учебных (упрощённых) и реальных задач дискретной математики и дискретной оптимизации.

владеть:

- терминологией топологической комбинаторики и алгоритмами справедливого дележа.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Привести полное доказательство леммы Шпернера для отрезка и треугольника (Шашкин).
2. Доказать лемму Таккера. .
3. Пусть f – непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ на себя. Докажите, что тогда отображение $g = f^2$ (композиция отображения f с самим собой) имеет по крайней мере две неподвижных точки. Верно ли это, если f отображает отрезок $[a, b]$ в себя, но не на себя?
4. Сформулируйте и докажите теорему Брауэра о неподвижной точке для квадрата.
5. Сформулируйте и докажите теорему Брауэра о неподвижной точке для круга.
6. Докажите теорему Брауэра о неподвижной точке, используя лемму Шпернера
7. Докажите теорему Борсука–Улама для окружности
8. Докажите первую и вторую теоремы о блинах
9. Привести полное доказательство теоремы о справедливом распределении арендной платы для двух участников.
10. Дана триангуляция многоугольника с вершинами в его вершинах. Доказать, что можно расставить метки А, В, С так, что у каждого треугольника будут все три метки.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой.

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.